GEOMETRIA I

Walcy Santos
walcy@im.ufrj.br
www.im.ufrj.br/~walcy
Sala – C127 Gab 02

Conteúdo do Curso:

- Breve histórico do trabalho de Euclides;
- Axiomas e postulados; Proposições, Teoremas e Corolários; Elementos de um resultado: hipóteses e tese;
- Geometria Plana- Modelos de Geometrias Discretas; Axiomas de incidência, de ordem e de mediição de segmentos;
- Função distância; Sistemas de Coordenadas na reta; Semiplanos; Ângulos; Convexidade;
- Congruência; Teorema do ângulo externo e conseqüências;

- O quinto postulado de Euclides;
- Teorema de Tales; Semelhança de tiriângulos;
- Teorema de Pitágoras; Círculos; Polígonos;
- Funções Trigonométricas;
- Áreas;
- Geometria Espacial- Axiomas de incidência e da tridimensionalidade; Retas: Planos;
- Construção de Sólidos; Volumes: Princípio de Cavalieri

Bibliografia

- Barbosa, J. L. M. – Geometria Euclidiana Plana, Coleção Professor de Matemática, SBM, 6ª ed, 2004
- Carvalho, P. C. P. – Introdução à Geometria Espacial, 4ª edição, SBM, 2002
- Greenberg, M.J. – Euclidean and non-euclidean Geometries, N.Y, Freeman , 3ª edi, 1993
- [Hilbert D., Cohn Vossen – Geometry and Imagination, AMS Chelsea Publishing: 1999.
- Moise, E.E. – Elementary Geometry from advanced Standpoint, Addison-Wesley,1990, 3ª ed

Avaliação

- Duas provas parciais com notas P1 e P2
- Se $MP=(P1+P2)/2\geq 7{,}0$ → Aprovado direto
- Se MP <7,0, deve fazer prova final e se PF denota a nota da prova final, temos:
- Se $M(MP+PF)/2\geq 5{,}0$ → aprovado
- Se $M(MP+PF)/2<5{,}0$ → reprovado

Segunda chamada

- Existe apenas a segunda chamada da prova final
- No caso do aluno perder uma das provas parciais, a prova final será a segunda chamada da prova perdida
- Neste caso, a prova final será a segunda chamada

O ovo e Galinha …

- *O que veio antes, o ovo ou a galinha?*.
- Considerando a galinha nasceu do ovo e o ovo foi colocado pela galinha, é difícil determinar o responsável pela criação original.

- De acordo com a teoria da evolução, a resposta do paradoxo, é que o ovo veio primeiro. Deve-se considerar que o ancestral da galinha (ainda não é uma) botou o ovo com a mutação que resultaria a moderna galinha. Esta por sua vez, apenas perpetuou essas mutações.

- AXIOMA: As espécies sempre evoluem por mutações.

- Segundo a teoria criacionista, a galinha veio antes, criada por Deus no início dos tempos.

- AXIOMA: Deus criou todos os seres vivos.

Teoria Axiomática

- Axiomas: frases matemáticas que são supostas verdadeiras sem nenhuma justificativa.
- EX: Na teoria dos números naturais, temos os seguintes axiomas:
    - Todo número natural n possui um sucessor n’
    - Não existe um número cujo sucessor seja 0
    - Se $n \neq m$ então $n' \neq m'$
    - Se 0 tem uma propriedade e esta propriedade também é possuida pelo sucessor de todos os números naturais que a possuem, então ela é possuída por todos os números naturais

Axiomas de Peano

Teoria Matemática

- A partir dos axiomas + regras lógicas, deduz-se os resultados matemáticos.

Geometria

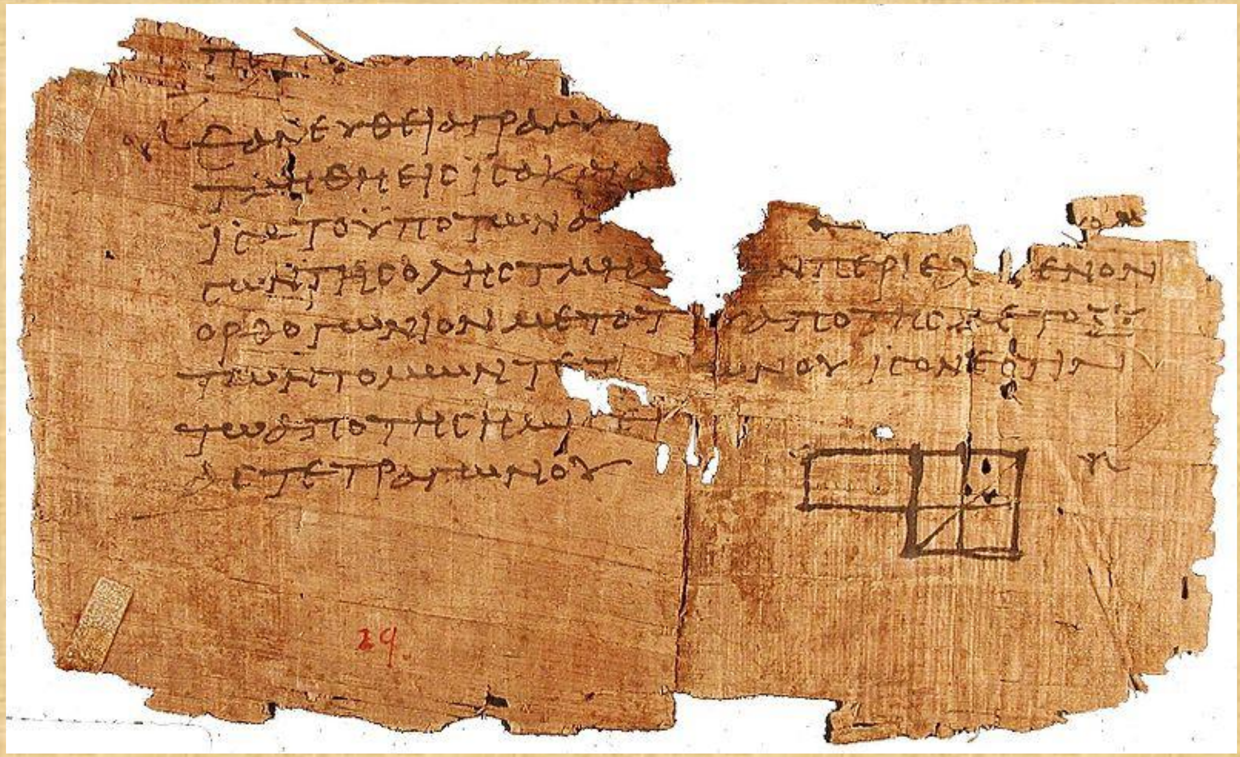
- Iremos dar um tratamento Axiomático ao estudo da geometria do plano e do espaço.

•Euclides
•Viveu em Alexandria por volta de 300 AC
•Autor do Primeiro texto com uma teoria matemática axiomática: Os Elementos.

Convidado por Ptolomeu I para compor o quadro de professores da recém fundada Academia, que tornaria Alexandria no centro do saber da época, tornou-se o mais importante autor de matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com seu monumental *Stoichia* (*Os elementos*, 300 a.C.), no estilo livro de texto, uma obra em treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço.

- Escrita em grego, a obra cobria toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de seus predecessores, como Hipócrates e Eudóxio, e sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos então com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado.

Os Elementos



Um fragmento dos *Elementos* encontrado no final do século XIX em Oxyrhynchus, datado de cerca de 100 D.C.

O frontispício de uma tradução latina de Adelardo de Bath dos *Elementos* de Euclides, c. 1309–1316; a tradução
 latina mais antiga sobrevivente dos *Elementos* é um tabalho de Adelardo no século XII,
que o traduziu do árabe.

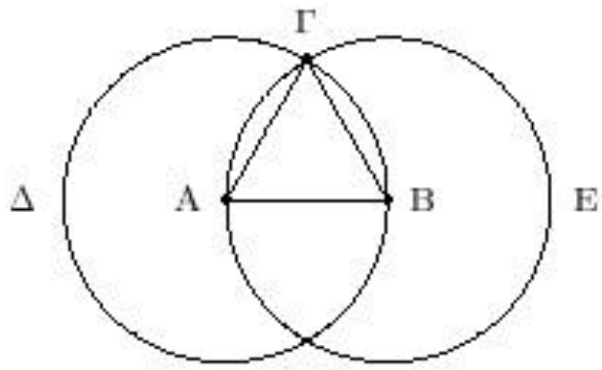
O frontispício da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa dos *Elementos* de Euclides, de 1570

O livro Os Elementos engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Os treze livros cobrem a geometria euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementar.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

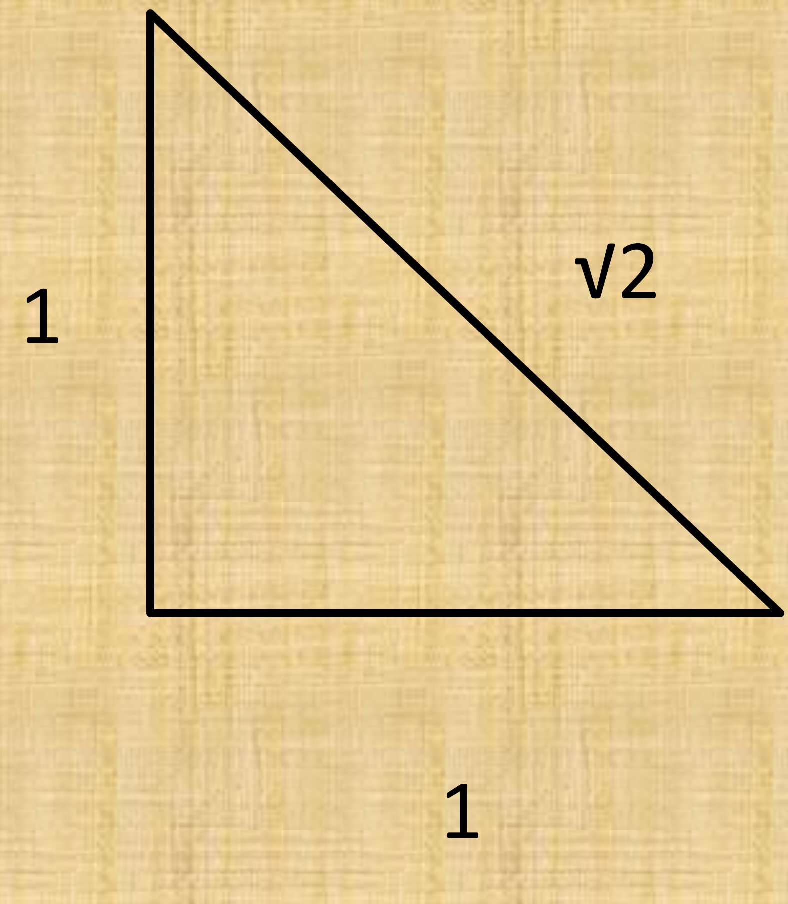
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

- Uma prova dos *Elementos* que, dado um segmento de reta, existe um triângulo equilateral que inclui o segmento como um de seus lados. A prova é por construção: um triângulo equilateral ΑΒΓ é feito desenhando-se os círculos Δ e Ε centrados nos pontos Α e Β, e tomando-se uma intersecção do círculo como o terceiro vértice do triângulo

- O sucesso dos *Elementos* é devido primeiramente à sua apresentação lógica da maior parte do conhecimento matemático disponível para Euclides. Muito do material não é formado de idéias originais dele, apesar de que muitas das provas o são.
- Apesar de ser considerado um texto difícil, ele é a referência de um primeiro texto com uma teoria axiomática.

Crise dos Irracionais



Definições

I) Ponto é o que não tem partes nem grandeza alguma.

II) Linha é o que tem comprimento e não tem largura.

III) As extremidades da linha são pontos.

IV) Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.

V) Superfície é o que tem comprimento e largura.

VI) As extremidades da superfície são linhas.

Axiomas ou Postulados

I. Desenhar uma linha reta de um ponto à outro ponto.
II. Produzir uma linha reta finita continuamente em outra linha reta.
III. Escrever um círculo dado qualquer centro e qualquer raio.
IV. Todos os ângulos retos são iguais.
V. Se uma linha reta caindo em duas linhas retas faz a soma dos ângulos interiores do mesmo lado ser inferior à dois ângulos retos as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, se encontram naquele lado onde os ângulos são inferiores à dois ângulos retos.

Noções comuns

(a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.

(b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

(c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

(d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

(e) O todo é maior do que qualquer uma das partes.

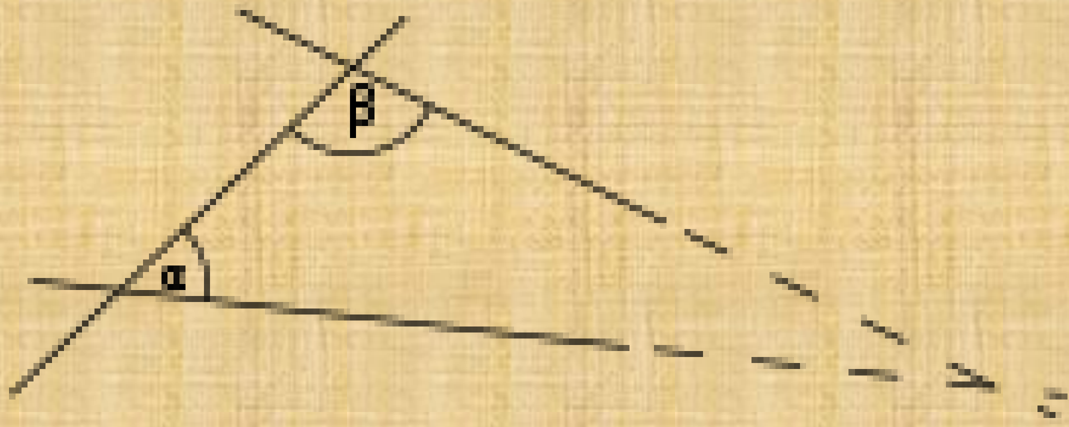
(a) Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

(b) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

(c) Pode-se traçaar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

(d) Todos os ângulos retos são iguais.

(e) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.


β
α

Crítica…

O quinto postulado aparece logo após a Proposição 27do Livro I que diz:

Se uma transversal corta um par de retas formando ângulos correspondentes iguais, então o par de retas é um par de retas paralelos.

Próclo (410 - 485), criticou este postulado nos seguintes termos:

- *"Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver... A asserção de que duas linhas rectas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária. (...) É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados."*

Muitas tentativas de provar o V Axioma

- A primeira tentativa, de que se há conhecimento, é de Cláudio Ptolomeu de Alexandria.
- Outro exemplo de uma tentativa frustrada de contornar o V postulado de Euclides é feita por John Wallis (1616-1703), matemático britânico antecessor de Isaac Newton. De fato, Wallis não fez mais do que propor um novo enunciado do V postulado de Euclides.

- Sacchieri
- Clairaut
- Legendre
- Lambert

Demonstração de G. Saccheri

- ***Saccheri centrou o seu estudo em certos quadriláteros, conhecidos por quadriláteros de Saccheri, com dois ângulos retos na base (digamos, A e B) e os lados adjacentes congruentes .***
- 

- ***Facilmente se prova na geometria absoluta que os ângulos no lado oposto à base (topo) são também congruentes .***
- Há, então três casos a considerar:

    Caso 1: os ângulos do topo são retos;

    Caso 2: os ângulos do topo são obtusos;

    Caso 3: os ângulos do topo são agudos.

- No primeiro caso, o quadrilátero □ ABCD será um retângulo. Saccheri pretendeu mostrar que este é o único caso possível (caindo, assim, na geometria euclidiana), mostrando que qualquer um dos outros casos conduz a uma contradição.
- Do caso 2 sai efetivamente uma contradição (com um teorema da geometria absoluta, o Teorema de Saccheri-Legendre).

Porém, por mais que tentasse, Saccheri não conseguiu extrair uma contradição do caso 3.

- Tudo quanto conseguiu foi uma grande lista de resultados "estranhos" (por exemplo: a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que 180). Completamente frustrado e esgotado pelo esforço, Saccheri exclama, em jeito de conclusão:

" *A hipótese dos ângulos agudos (caso 3) é absolutamente falsa, pois é repugnante à natureza da linha reta*."

- Estranha conclusão para um trabalho matemático brilhante. Sem o saber, Saccheri tinha descoberto a geometria não euclidiana!

Afirmações Equivalentes ao Axioma V.

- *A soma de [as medidas de] os ângulos de qualquer triángulo tanto faz a [a soma das medidas de] dois ângulos retos.* Elementos, I, 32. (Proposição já conhecida em tempos de Aristóteles, século IV a. C.)

- *As retas paralelas são equidistantes* (atribuído a Posidonio, séculos I-II a. C.)

- *Por um ponto exterior a uma reta só podemos traçar uma paralela a reta dada* (Claudio Ptolomeo século II).
  Esta é, sem dúvida, a formulação mais conhecida do postulado. Tanto é que é muito frequente encontrar livros nos que se diz que é este o quinto postulado de Euclides.

- *Duas retas paralelas guardam entre si uma distância finita* (Proclo, século V).

- *As retas não equidistantes convergen em uma direcção e divergen na oposta* (Thābit ibn Qurra, h. 826-901

•*Todos os pontos equidistantes de uma linha recta, situados a um lado determinado dela, constituem uma linha reta* (Clavio, 1574).

•*Sobre uma reta finita sempre se pode construir um triângulo semelhante a um triângulo dado* (Wallis, 1663).

•*Existe um par de triângulos não congruentes, mas semelhantes* (Saccheri, 1733).

•*Em todo quadrilátero que contenha três ângulos retos, o quarto ângulo também é reto.* (Clairaut, 1741).

•*Pode-se construir um triángulo cuja área seja maior que qualquer área dada* (Gauss, 1799).

•*Dados três pontos não alinhados, sempre será possível construir um círculo que passe por todos eles* (Legendre, 1824).

Prova por contradição…

- O jovem húngaro Janos Bolyai (1802-1860) admite a negação do postulado de paralelismo de Euclides como hipótese não absurda, isto é, como um novo postulado, a juntar aos postulados habituais da geometria absoluta.

- Pela mesma época, e trabalhando independentemente, o jovem russo Nicolai Lobachewski (1792-1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não euclidiana à qual chama, primeiramente "imaginária" e depois "pangeometria".

- A mera publicação dos trabalhos de Bolyai e Lobachewski não garantiu a nenhum destes matemáticos o reconhecimento que mereciam. Pelo contrário, permanecerem praticamente ignorados durante mais de trinta anos. O que eles propunham era simplesmente inconcebível.

- Gauss :
- *"Estou cada vez mais convencido de que a necessidade da nossa geometria (euclidiana) não pode ser demonstrada, pelo menos não pela razão humana, nem por culpa dela. Talvez, numa outra vida, consigamos obter a intuição sobre a natureza do espaço que, no presente, é inantingível."*

Modelo